BLOQUE II: ÁLGEBRA LINEAL.

TEMA 6

FORMAS CUADRATICAS REALES

RESUMEN TEÓRICO

ÍNDICE

1. DEFINICIÓN Y EXPRESIONES DE UNA FORMA CUADRÁTICA.

DEFINICION 1. (Forma Cuadrática) Dada una matriz simétrica[1], A, se denomina forma cuadrática (F.C.) definida por la matriz a la aplicación

$$Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\bar{x} \to Q(\bar{x})$$

que asigna a cada vector de $\mathbb{R}^n$ un número real de la forma:

$$Q(\bar{x}) = X^t \cdot A \cdot X = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A esta forma de determinar la forma cuadrática se le denomina *expresión matricial.*

EJEMPLO 1. Dada la matriz siguiente $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Determinar la forma cuadrática definida por dicha matriz y calcular la imagen de los vectores (2,1), (-2,4) y (0,0)

La forma cuadrática de $\mathbb{R}^2$ definida por la matriz anterior será de la forma:

$$Q(x,y) = (x \quad y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para calcular la imagen de los vectores únicamente sustituiremos los valores dados y realizaremos la multiplicación de las tres matrices:

$Q(2,1) = (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (7 \quad 7) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 19$

$Q(-2,4) = (-2 \quad 4) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = (8 \quad -10) \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -56$

$Q(0,0) = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

[1] Recodemos la definición 5 del "Tema 0. Matrices": Se denominan *matrices simétricas* a las matrices que coinciden con su traspuesta, $A = A^T$ es decir, son aquellas que verifican que $a_{ij} = a_{ji}$,

Teniendo en cuenta la expresión matricial de una forma cuadrática y realizando el producto de las tres matrices se obtiene que la forma cuadrática puede escribirse como un polinomio formado por la suma de monomios de grado dos. Esta expresión se denominada *expresión polinómica de la forma cuadrática:*

PROPIEDAD 1. (Expresión polinómica): Dada una forma cuadrática

$$Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \to Q(\bar{x}) = X^t A X$$

se verifica que:

$$Q(\bar{x}) = Q(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots$$

Observación:

El cambio de la forma polinómica a la forma matricial, o viceversa, es inmediato si se tiene en cuenta que los términos de la diagonal principal de *A* son los coeficientes de los términos cuadráticos del polinomio, (x_i^2) y los restantes no cuadráticos ($x_i x_j$), la mitad de los términos cruzados en la expresión polinómica.

EJEMPLO 2. Calcular la expresión polinómica de la forma cuadrática del ejemplo 1.

$$Q(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta la observación anterior se verifica que:

Coeficiente de x^2 es el término de la matriz $a_{11} = 2$

Coeficiente de y^2 es el término de la matriz $a_{22} = -1$

Coeficiente de xy es el doble del término de la matriz $a_{12} = 6$

Por lo tanto la expresión polinómica de la forma cuadrática es

$$Q(x,y) = 2x^2 - y^2 + 6xy$$

Dada la siguiente forma cuadrática $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$Q(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Calcular su expresión polinómica:

Teniendo en cuenta la relación entre ambas expresiones se verifica que:

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2z^2 + 8xy - 2xz$$

EJEMPLO 3. Dada la siguiente forma cuadrática $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$Q(x,y,z) = x^2 - 5z^2 - xy + 4yz$$

Calcular su expresión matricial:

Teniendo en cuenta la relación entre ambas expresiones se verifica que la matriz simétrica que define a la forma cuadrática es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Por tanto la expresión matricial es:

$$Q(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. CLASIFICACIÓN DE UNA FORMA CUADRÁTICA. ESTUDIO DEL SIGNO.

Lo más relevante en el estudio de las formas cuadráticas es averiguar el signo de las imágenes de los vectores, en concreto, saber si dichas imágenes son todas del mismo signo (positivo o negativo) o si por el contrario tienen diferente signo. Para ello realizaremos la siguiente clasificación de las formas cuadráticas.

DEFINICION 2. Podemos distinguir cinco tipos diferentes de formas cuadráticas:

Dada una forma cuadrática
$$\begin{aligned} Q: R^n &\longrightarrow \Re \\ \overline{x} &\longrightarrow Q(\overline{x}) = X^t \cdot A \cdot X \end{aligned}$$

Diremos que:

- $Q(\overline{x})$ es <u>*definida positiva*</u> (D.P.) cuando las imágenes de todos los vectores, excepto el nulo, son positivas y distintas de cero

$$\forall \overline{x} \neq \overline{0} \Rightarrow Q(\overline{x}) > 0$$

- $Q(\overline{x})$ es <u>*definida negativa*</u> (D.N.) cuando las imágenes de todos los vectores, excepto el nulo, son negativas y distintas de cero

$$\forall \overline{x} \neq \overline{0} \Rightarrow Q(\overline{x}) < 0$$

- $Q(\overline{x})$ es <u>*semidefinida positiva*</u> (S.D.P.) cuando las imágenes de todos los vectores, excepto el nulo, son positivas y algunas de ellas cero

$$\forall \overline{x} \neq \overline{0} \Rightarrow Q(\overline{x}) \geq 0 \quad \text{y} \quad \exists \overline{y} \neq \overline{0} \,/\; Q(\overline{y}) = 0$$

- $Q(\overline{x})$ es *semidefinida negativa* (S.D.N.) cuando las imágenes de todos los vectores, excepto el nulo, son negativas y algunas de ellas cero

$$\forall \overline{x} \neq \overline{0} \Rightarrow Q(\overline{x}) \leq 0 \quad \text{y} \quad \exists \overline{y} \neq \overline{0} \ / \ Q(\overline{y}) = 0$$

- $Q(\overline{x})$ es *indefinida (Ind.)* cuando las imágenes de algunos vectores son positivas y la de otros negativas.

$$\exists \overline{x} \neq \overline{0} \ / \ Q(\overline{x}) > 0 \quad \text{y} \quad \exists \overline{y} \neq \overline{0} \ / \ Q(\overline{y}) < 0$$

Observación:

Dado que cualquier forma cuadrática viene determinada por una matriz simétrica, la clasificación anterior es extensible a las matrices simétricas, es decir, que una matriz simétrica diremos que es D.P. si la forma cuadrática que define es D.P., que una matriz simétrica diremos que es D.N. si la forma cuadrática que define es D.N., etc., etc.

EJEMPLO 4. Estudiar el signo[2] de la forma cuadrática del ejemplo 1.

$$Q(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 6xy - y^2$$

Recordemos que habíamos calculado las imágenes de varios vectores[3]:

$$Q(2,1) = (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (7 \quad 7)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 19$$

$$Q(-2,4) = (-2 \quad 4)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = (8 \quad -10)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -56$$

Hemos encontrado dos vectores tales que sus imágenes son de distinto signo, por tanto la matriz simétrica y su forma cuadrática asociada es INDEFINIDA.

3. MÉTODOS PARA EL ESTUDIO DEL SIGNO.

Comprobar el signo de una determinada forma cuadrática tanto a través de su expresión matricial como de su expresión polinómica no es inmediato[4]. Por lo que existen diferentes métodos para averiguar a que tipo pertenece una matriz simétrica o su forma cuadrática asociada.

---

[2] Averiguar a cual de los cinco tipos anteriores pertenece una determinada forma cuadrática se conoce como el estudio del signo de la forma cuadrática o de la matriz simétrica

[3] Observar que la imagen del vector nulo, $Q(0,0) = 0$, no influye en la clasificación de la forma cuadrática ya que siempre va a ser cero.

[4] En el caso de que fuese indefinida es sencillo comprobarlo, como en el ejemplo anterior. Ahora bien, para comprobar que es definida o semidefinida tendríamos que calcular las imágenes de todos los infinitos vectores.

3.1. Estudio del signo mediante los autovalores.

El estudio del signo de una matriz diagonal o de su forma cuadrática asociada es inmediato.

PROPIEDAD 2. Dada la forma cuadrática definida por una matriz diagonal

$$Q(\overline{x}) = X^T \cdot \Lambda \cdot X = (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se verifica que:

- $Q(\overline{x})$ es definida positiva (D.P.) $\Leftrightarrow \lambda_{ii} > 0 \quad \forall i = 1,...,n$
- $Q(\overline{x})$ es definida negativa (D.N.) $\Leftrightarrow \lambda_{ii} < 0 \quad \forall i = 1,...,n$
- $Q(\overline{x})$ es semidefinida positiva (S.D.P.) $\Leftrightarrow \lambda_{ii} \geq 0 \quad \forall i = 1,...,n$ con algún $\lambda_{jj} = 0$
- $Q(\overline{x})$ es semidefinida negativa (S.D.N.) $\Leftrightarrow \lambda_{ii} \leq 0 \quad \forall i = 1,...,n$ con algún $\lambda_{jj} = 0$
- $Q(\overline{x})$ es indefinida (Ind.) $\Leftrightarrow$ existen $\lambda_{ii} > 0$ y $\lambda_{jj} < 0$

Para el estudio del signo de una matriz simétrica cualquiera (no necesaria diagonal) podemos apoyarnos en los siguientes conceptos y propiedades que concluirán con el enunciado del método de autovalores[5].

DEFINICION 3. (Matrices congruentes): Dadas dos matrices simétricas A y B se dicen que son congruentes si existe una tercera matriz regular C tal que:

$$A = C^T BC$$

PROPIEDAD 3. Dos matrices A y B congruentes definen (o representa) la misma forma cuadrática

Consideremos una forma cuadrática $Q(\overline{x}) = X^T AX$ y el cambio de variable definido por $X = CY$, siendo la matriz C tal que $A = C^T BC$

Si sustituimos en la forma cuadrática obtenemos:

$$Q(\overline{x}) = X^T AX = Y^T C^T ACY = Y^T BY = Q(\overline{y})$$

[5] Las raíces del polinomio característico, si existen, son los autovalores de la matriz, es decir, las soluciones de la ecuación $p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

Según esta última propiedad si encontrásemos una matriz diagonal congruente con una matriz cualquiera A simétrica, el estudio del signo de la matriz A se reduciría al estudio de la matriz diagonal congruente con ella, y éste sería inmediato aplicando la PROPIEDAD 2.
Enunciemos las siguientes propiedades

PROPIEDAD 4. La matriz diagonal formada por los autovalores de una matriz simétrica dada es una matriz congruente con ella.

PROPIEDAD 5. Todos autovalores de cualquier matriz simétrica son reales.

PROPIEDAD 6. Toda matriz simétrica es diagonalizable.
Aplicando las propiedades anteriormente mencionadas podemos enunciar un método para el estudio de signo de cualquier forma cuadrática[6]

PROPIEDAD 7. (MÉTODOS DE LOS AUTOVALORES). Dada la forma cuadrática definida por una matriz simétrica A

$$Q(\bar{x}) = X^t \cdot A \cdot X = (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se verifica que:

- $Q(\bar{x})$ es definida positiva (D.P.) $\Leftrightarrow$ Todos los autovalores de la matriz A son positivos y no nulos
- $Q(\bar{x})$ es definida negativa (D.N.) $\Leftrightarrow$ Todos los autovalores de la matriz A son negativos y no nulos
- $Q(\bar{x})$ es semidefinida positiva (S.D.P.) $\Leftrightarrow$ Todos los autovalores de la matriz A son positivos y alguno de ellos nulo
- $Q(\bar{x})$ es semidefinida negativa (S.D.N.) $\Leftrightarrow$ Todos los autovalores de la matriz A son negativos y alguno de ellos nulo
- $Q(\bar{x})$ es indefinida (Ind.) $\Leftrightarrow$ la matriz A posee autovalores positivos y negativos.

EJEMPLO 5. Estudiar el signo de la forma cuadrática asociada a la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

El polinomio característico de la matriz es:

---

[6] Las demostraciones de las estas ultimas propiedades, así como un desarrollo detallado sobre la existencia de diferentes matrices diagonales congruentes con una dada y la ley de inercia que implica la indiferencia del estudio del signo de la matriz diagonal congruente elegida puede encontrarse en la bibliografía complementaria: "Álgebra Lineal para la Economia" de Sinesio Gutierrez, pag. 119-122.

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-1-\lambda)-9=\lambda^2-\lambda-11$$

Los autovalores son:

$$p(\lambda)=\lambda^2-\lambda-11=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}=3'85>0\\ \lambda=\dfrac{1-3\sqrt{5}}{2}=-2'85<0\end{cases}$$

Dado que un autovalor es positivo y otro negativo podemos asegurar que la forma cuadrática y la matriz dada es INDEFINIDA.

EJEMPLO 6. Estudiar el signo de la forma cuadrática

$$Q(\overline{x})=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz es:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3-2-3(1-\lambda)=-\lambda^3+3\lambda^2$$

Los autovalores son:

$$p(\lambda)=-\lambda^3+3\lambda=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=3\ \text{(simple)}\\ \lambda=0\ \text{(doble)}\end{cases}$$

Dado que los autovalores son todos positivos y cero entonces la matriz es SEMIDEFINIDA POSITIVA.

EJEMPLO 7. Estudiar el signo de la forma cuadrática asociada a la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-3&1\\0&1&-3\end{pmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz es:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&0&0\\0&-3-\lambda&1\\0&1&-3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3-7\lambda^2-14\lambda-8$$

Los autovalores son:

$$p(\lambda)=-\lambda^3-7\lambda^2-14\lambda-8=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=-2\\ \lambda=-4\end{cases}$$

Dado que todos los autovalores son negativos (no nulos) entonces la matriz es DEFINIDA NEGATIVA.

3.2. Estudio del signo mediante los menores principales.

Uno de los inconvenientes del método de autovalores es la necesidad de resolución de ecuaciones de grado superior a dos. Otro de los métodos para el estudio del signo de formas cuadráticas es el método de los menores principales. Los cálculos de este método se reducen al cálculo de determinantes, si bien tiene el inconveniente de no dar respuesta a todos los casos.

DEFINICION 4. (Menores Principales de una matriz cuadrada) Dada una matriz cuadrada de orden n, se denominan menores principales de la matriz a los determinantes de las submatrices formadas por los elementos comunes de las primeras filas y las primeras columnas de la matriz

Sea la matriz siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Menor de orden uno: $A_1=a_{11}$

Menor de orden dos: $A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}$

Menor de orden tres: $A_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$

… … … … … …… … … … … …

Menor de orden n: $A_n=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

PROPIEDAD 8. (MÉTODO DE LOS MENORES PRINCIPALES): Dada la forma cuadrática definida por una matriz simétrica A

$$Q(\bar{x}) = X^t \cdot A \cdot X = (x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

se verifica que:

a) Todos los menores principales de la matriz son positivos (no nulos) $\Leftrightarrow Q(\bar{x})$ es Definida Positiva

$$A_1 > 0, A_2 > 0, ..., A_n > 0 \Leftrightarrow Q(\bar{x}) \text{ es D.P.}$$

b) Los menores principales de la matriz alternan de signo comenzando por negativo (y no nulos) $\Leftrightarrow Q(\bar{x})$ es Definida Negativa

$$A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, ... \Leftrightarrow Q(\bar{x}) \text{ es D.N.}$$

c) Si todos los menores principales de la matriz son positivos (no nulos) excepto el ultimo que sea cero $\Rightarrow Q(\bar{x})$ es Semidefinida Positiva

$$\text{Si } A_1 > 0, A_2 > 0, ..., A_{n-1} > 0, A_n = 0 \Rightarrow Q(\bar{x}) \text{ es S.D.P.}$$

d) Si los menores principales de la matriz alternan de signo comenzando por negativo (y no nulos) excepto el ultimo que sea nulo $\Rightarrow Q(\bar{x})$ es Semidefinida Negativa

$$\text{Si } A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, ..., A_n = 0 \Rightarrow Q(\bar{x}) \text{ es S.D.N.}$$

e) Si el último menor es distinto de cero y la forma cuadrática no es Definida (positiva o negativa) $\Rightarrow Q(\bar{x})$ es Indefinida

$$\text{Si } A_n \neq 0 \text{ y es falso a) y b)} \Rightarrow Q(\bar{x}) \text{ es Indefinida}$$

f) Si el último menor es cero, los demás menores son no nulos y la forma cuadrática no es Semidefinida (positiva o negativa) $\Rightarrow Q(\bar{x})$ es Indefinida

$$\text{Si } A_n = 0, A_i \neq 0 \ (i = 1, ..., n-1) \text{ y es falso c) y d)} \Rightarrow Q(\bar{x}) \text{ es Indefinida}$$ [7]

EJEMPLO 8. Estudiar el signo de la siguiente forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 4yz$$

Determinemos la matriz simétrica que define la forma cuadrática:

---

[7] Obsérvese que no siempre decide el método de los menores principales. Por ejemplo si el último menor es nulo y algun otro menor tambien es nulo, en este caso no podríamos determinar el signo de la forma cuadrática mediante el método de los menores principales. Si bien el método de los autovalores sí nos permite determinar el signo de cualquier forma cuadrática.

$$Q(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Calculemos los tres menores principales de la matriz:

$$A_1=1>0 \qquad A_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=3>0 \qquad A_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=5>0$$

Dado que los tres menores principales son positivos (distintos de cero) entonces la forma cuadrática es DEFINIDA POSITIVA

EJEMPLO 9. Estudiar el signo de la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -10\end{pmatrix}$

Determinemos el signo la matriz calculando los tres menores principales:

$$A_1=-1<0 \qquad A_2=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1>0 \qquad A_3=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -10\end{vmatrix}=0$$

Dado que los menores alternan de signo empezando por negativo ($A_1<0$) y además el último menor es cero se verifica que la matriz es SEMIDEFINIDA NEGATIVA.

EJEMPLO 10. Estudiar el signo de la siguiente forma cuadrática

$$Q(x,y,z,t)=x^2-2y^2-3z^2+3t^2+2xy+8xt+4yz+2zt$$

Determinemos la matriz simétrica que define la forma cuadrática:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 1\\ 4 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Calculemos el signo de los cuatro menores principales:

$$A_1=1>0 \qquad A_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-3<0$$

$$A_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix}=5>0 \qquad A_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 1\\ 4 & 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-30<0$$

Podemos observar que no se verifican los casos a) ni b) y además el determinante de la matriz es no nulo. Por lo tanto podemos asegurar según apartado e) que la matriz es INDEFINIDA[8]

[8] Los menores principales alternan de signo pero no comienza por negativo ($A_1 > 0$) por tanto la matriz no es definida negativa.